Les mates al billar i una situació d'exploració per treballar a l'aula de matemàtiques

Guillem Bonet Carbó
Institut de Santa Coloma de Farners
gbonet2@xtec.cat

Resum

Tota situació desconeguda per a l'alumne requereix un procés de familiarització i una investigació posterior per conèixer-ne les propietats principals, que serviran de guia per traçar un camí que ens porti a solucionar un problema concret. En aquest cas, el nostre problema ens passejarà pel món del billar, un món amb què en general els alumnes de l'ensenyament secundari obligatori (ESO) no estan familiaritzats. A través d'un procés d'investigació els donarem pautes i eines amb la idea que ells acabin construint la seva manera de resoldre el problema.

Abstract

Every unknown situation for students requires a process of familiarization and subsequent research to learn about its main properties. This process will guide them in the design of a roadmap for solving a particular problem. In our case, the problem will take us into the world of billiards, which secondary school students are not expected to be familiar with. Through guided investigation students will be provided with guidelines and tools with the aim of them being able to develop their own way of solving the problem.

Introducció

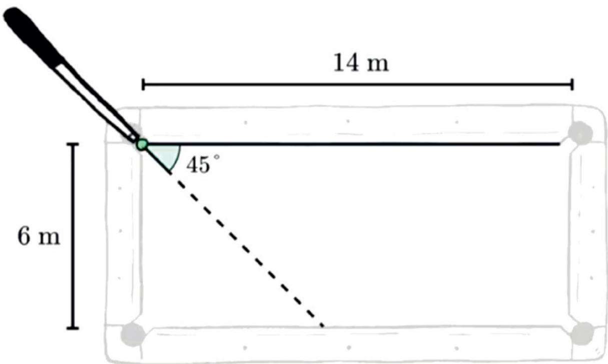
Aquest és el primer de tres articles encarats a descobrir algunes propietats matemàtiques que podem trobar en el joc del billar. Dit això, el que es pretén en aquest modest escrit no és tant donar unes bases sòlides sobre les grans propietats matemàtiques i físiques que s'amaguen al món del billar, sinó oferir al professorat idees matemàtiques senzilles i que poden ser explorades i analitzades a l'aula de matemàtiques d'educació secundària i, potser també, oferir un espai d'investigació a batxillerat.

Amb aquestes propostes es vol fer l'ullet a la idea d'investigar les matemàtiques en un context determinat a través de la resolució de problemes. Sí, es pretén que els alumnes siguin capaços de resoldre les situacions proposades a través del raonament i de l'experimentació, una experimentació que es treballa inicialment amb materials rudimentaris, com ara boles de fusta, i posteriorment amb aplicacions de GeoGebra ja creades per aconseguir que els alumnes puguin comprovar el resultat de les seves deduccions en taulells de billar.

Un problema per anar fent boca...

Ja fa temps, el 29 de febrer de 2020, vaig trobar a les xarxes socials un problema signat per l'usuari de Twitter @brilliantorg on es demanava resoldre matemàticament una situació contextualitzada en el món del billar. El problema en qüestió, il·lustrat amb l'esquema del billar que dibuixava la situació, deia el següent:

Tenim un billar rectangular de dimensions 14 × 6. Piquem una bola que es troba en una cantonada seguint la bisectriu d'aquesta. Si suposem que la bola mai no s'atura, podrem predir a quin forat anirà a parar la bola en cas que finalment caigui en algun?



Imatge 1. Esquema de la situació proposada al problema de @Brilliantorg.

El problema, tot i que queda un xic lluny de la realitat si ens fixem en les dimensions del billar en qüestió, permet explorar algunes propietats del joc que poden ser connectades ràpidament amb conceptes matemàtics. A part, permet modificar-ne fàcilment les condicions inicials i, d'aquesta manera, obrir-lo per aconseguir no només resoldre'l, sinó trobar resultats més generals.

El problema, en el qual us convidem a pensar abans que continueu llegint aquest article, té un potencial d'exploració increïble al darrere. Per exemple, ens podem plantejar com variarà la solució si modifiquem els costats del rectangle inicial. Suposant que la llargada de la taula sigui 36 m, quina mida ha de tenir l'amplada per aconseguir que la bola acabi en un forat o en un altre? Podria ser que mai acabés en cap forat? I si modifiquem l'angle de llançament?

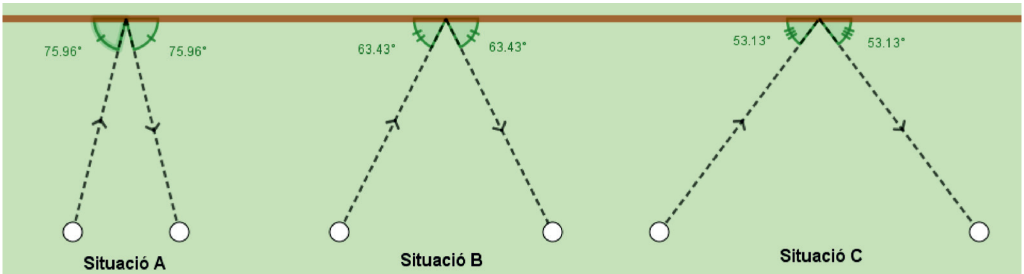
Totes les preguntes que es facin els nostres alumnes per ampliar aquesta situació inicial de ben segur que enriquiran el nostre problema i aconseguiran que el nivell d'aprenentatge de cadascun s'ajusti a les seves necessitats.

Un parèntesi en la resolució del problema

Per resoldre aquest exercici ens és imprescindible entendre el funcionament d'algunes lleis del billar; per exemple, els rebots a una banda.

Si tirem la bola contra un punt concret d'una banda sense cap efecte,[1] com farem a partir d'ara en tots els exercicis d'aquest article, veurem que la bola no rebota de manera aleatòria contra la banda, sinó que sempre segueix un mateix camí. En aquest cas, el camí que segueix després del rebot manté contra la banda el mateix angle que l'hi ha portat.

$$\textit{angle d'incidència} = \textit{angle de rebot}$$



Imatge 2. Rebots de billar d'una bola contra una banda.

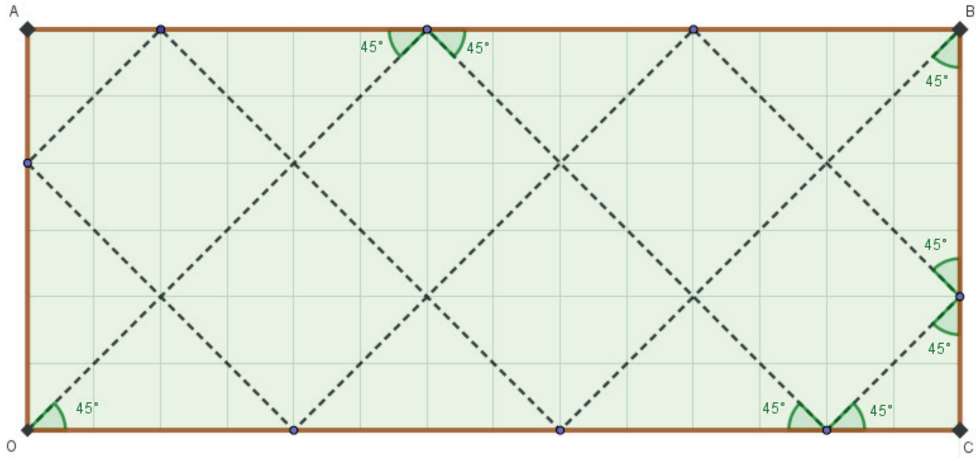
Per constatar aquest fet podem fer alguns llançaments a l'aula amb boles de fusta, per exemple, fent-les rebotar contra un mur. Si en filmem el moviment des d'una càmera zenital, podem captar la trajectòria de la bola i, posteriorment, analitzar l'angle d'incidència i de sortida. Així mateix, després d'haver fet alguna prova amb les boles de fusta també podem usar alguna aplicació de geometria dinàmica, com ara el GeoGebra, i analitzar el moviment de la bola.

Resposta a una pregunta que ens obre la porta a més preguntes

Un cop entès el moviment de rebot d'una bola contra la banda, el procés de cerca de la solució sembla ben senzill. Només cal prolongar el camí que segueix la bola quan surt del forat superior dret amb un angle de 45° i fins a trobar a quina cantonada acabarà anant a parar.

A primer cop d'ull, el procés de cerca de la resposta no ha estat especialment complicat: cal anar buscant els rebots de la bola cada cop que toca una banda i garantint que l'angle d'incidència coincideixi amb l'angle de sortida. Com que l'angle és de 45° i el punt de sortida inicial (hem escollit el punt O) és un vèrtex de la taula de billar, el traç de la bola seguirà el camí marcat per la bisectriu d'aquesta cantonada, rebotant contra les bandes sempre amb l'angle de 45°, i arribarà al punt B, el vèrtex de la taula més allunyat del punt de sortida, O.

1. En aquests exercicis és preferible treballar sense efectes de la bola per restringir els càlculs a models lineals.



Imatge 3. Camí de la bola amb un llançament de 45°.

Nota: en l'aplicació d'aquesta activitat a l'aula és interessant que l'alumnat de la primera etapa d'ESO treballi la mesura en graus usant el transportador d'angles. Per aquest motiu, serà convenient que en aquesta primera tasca no li facilitem el full quadriculat. En canvi, si els volem facilitar la feina en tasques repetitives posteriors, els podem donar el taulell quadriculat amb quadrats unitaris; en aquest cas, el recorregut de la bola marcarà diagonals d'alguns d'aquests quadrats.

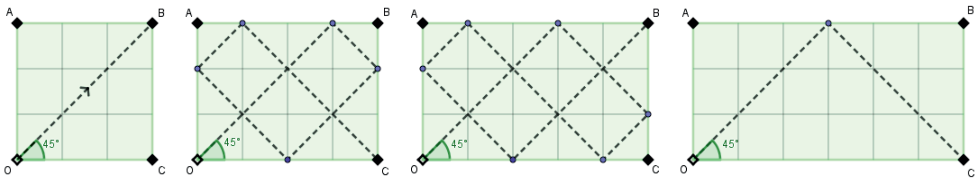
Fet! Ja hem donat resposta al problema inicial. Si llancem una bola amb un angle de 45° des d'un dels vèrtexs de la taula, acabarà arribant a la cantonada més allunyada d'aquest vèrtex de sortida.

Fet? Ni de bon tros! Què ens ha aportat de moment aquest petit exercici? Ben poca cosa. Hem de fer un pas més! Quines preguntes ens podem fer per ampliar el problema? Per exemple, si les dimensions del taulell fossin unes altres, hauríem arribat al mateix punt? I si modifiquem l'angle de sortida? Com varia el nombre de rebots en funció de les dimensions de la taula? Uf, quantes preguntes! Posem-nos a investigar!

Primers passos cap a una descoberta

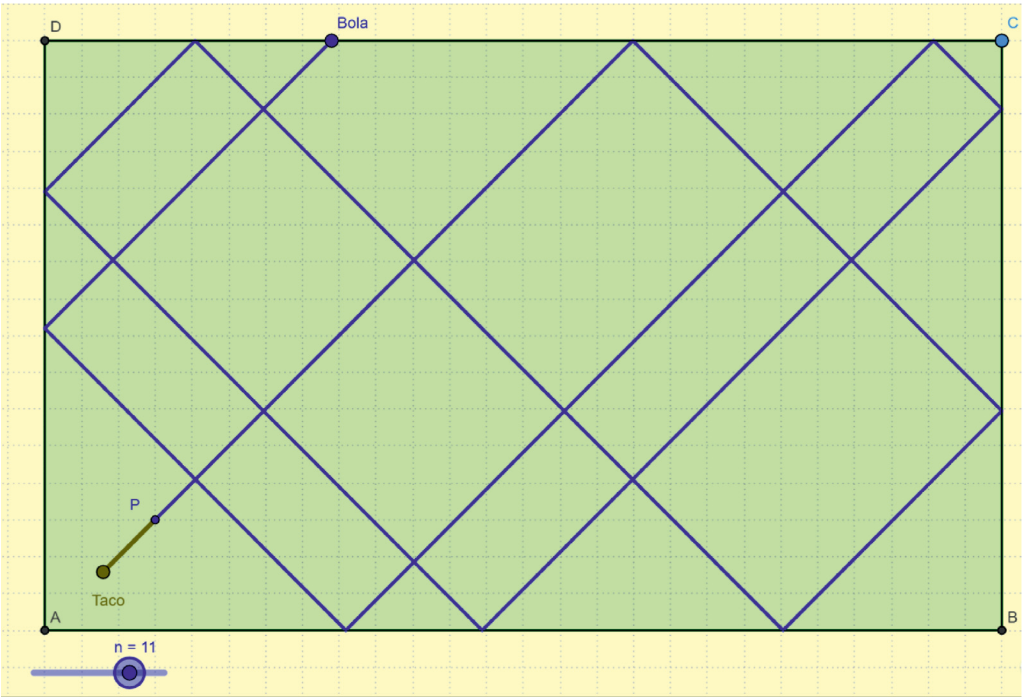
Tot procés de descoberta exigeix, abans que aquesta es produeixi, una investigació inicial de la qual hem de tenir definits molt bé quins seran els paràmetres de cerca. En aquest cas, anirem variant les dimensions de la taula de billar i anotarem el nombre de rebots i el forat en què acaba la bola llançada amb un angle de 45° sempre des del costat inferior esquerre, el nostre origen de coordenades, que anomenarem vèrtex *O*.

Fem unes quantes proves. Quins resultats apareixen si ho intentem per als taulells de dimensions 3×3, 4×3, 5×3 i 6×3? Vegem-ho!



Imatge 4. Camí de la bola amb un llançament de 45° als taulells de dimensions 3 × 3, 4 × 3, 5× 3 i 6 × 3.

En un principi, aquest primer intent només ens ha servit per començar a penetrar dins el problema. Veiem a primer cop d'ull que els resultats que ens surten són un xic dispars. Pel que fa al vèrtex d'arribada, els resultats han estat *B*, *C*, *B* i *C*. Fa la sensació que, almenys als taulells en què la segona dimensió és 3, els forats *B* i *C* es van alternant, de manera que cau en el *B* quan la primera dimensió és parell i cau en el *C* quan és senar. Pel que fa al nombre de tocs a una banda (comptarem l'entrada al darrer vèrtex com a un d'aquests tocs), els resultats són 1, 6, 7 i 2. No sembla que se segueixi cap ordre.

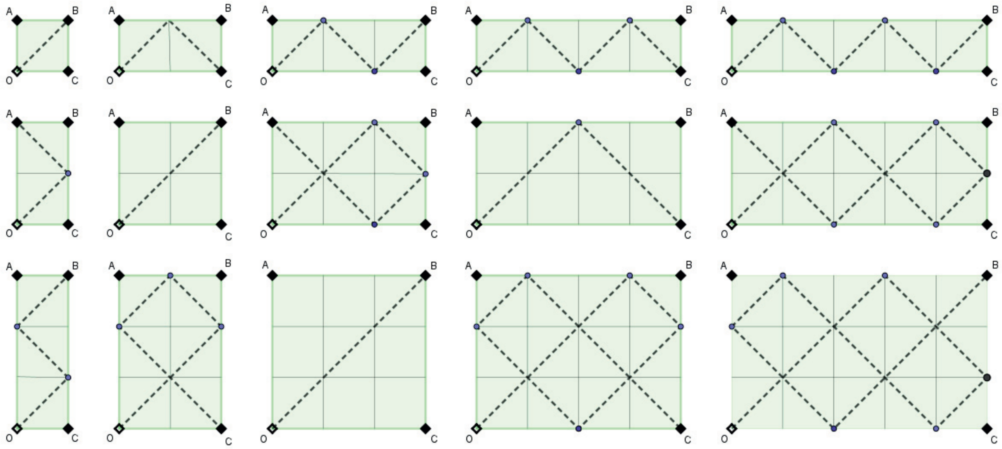


Imatge 5. Aplicació Billar d'Ignacio Larrosa, www.geogebra.org/m/gzF2CrHS.

El que seria molt recomanable per continuar amb l'exploració del problema seria començar amb casos més senzills. Per exemple, amb taulells en què un costat és 1 o 2. Després de veure com varien els paràmetres estudiats en els casos més senzills, podem anar augmentant la dimensió per intentar trobar una norma que ens serveixi per trobar una generalització del nostre cas.

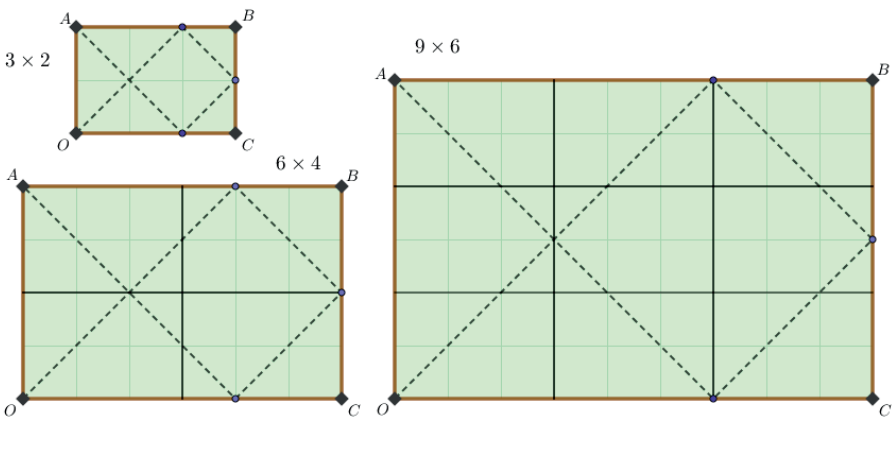
Aquesta estratègia de cerca inductiva de la solució és molt bona però costosa. Costosa en el sentit que, per dur-la a terme, haurem de representar moltes taules de billar amb el recorregut de la bola inclòs. Per facilitar-nos la feina, és aconsellable usar alguna aplicació ja muntada de GeoGebra, com, per exemple, la de Josep Iglésias (www.geogebra.org/m/x9fkpj7b) o la proposada per Ignacio Larrosa (imatge 5), que ens permet visualitzar la trajectòria d'una bola en un taulell de dimensió variable i amb una posició inicial de la bola i un angle de llançament a petició del consumidor.

Tant si s'usa l'aplicació com si no, és important mantenir a la vista qualsevol resultat que anem traient, de la manera més ordenada possible, usant, per exemple, una taula. D'aquesta manera podrem identificar qualsevol tendència que segueixin els diferents camins.



Imatge 6. Camins d'un llançament a 45° en diferents taulells.

Un cop representats i ordenats (val a dir que jo n'he hagut de dibuixar uns quants més abans de poder treure cap mena de conclusió), es comencen a veure algunes propietats. Com, per exemple, que es distingeix una mena d'antisimetria entre els taulells $n \times m$ i $m \times n$. També, i és més que evident que en taulells quadrats $n \times n$ la bola caurà sempre al vèrtex B, en nomes una banda (la d'arribada).



Imatge 7. Camins d'un llançament a 45° en diferents taulells proporcionals.

Una altra propietat curiosa que podem veure només amb els gràfics és en taulells amb la forma $(k \cdot n) \times (k \cdot m)$. En els taulells que es generen d'aquesta manera, mantenint n i m i variant el valor de k, podem veure que els camins seguits per la bola tenen la mateixa forma (imatge 7). Aquesta propietat es pot entendre dividint cada costat dels quadrats unitats en k parts iguals; d'aquesta forma generaríem una altra retícula més fina que mantindria el camí de la bola també en el taulell de dimensió $(k \cdot n) \times (k \cdot m)$.

En què més ens podem fixar? Observem a la taula 1 el vèrtex d'arribada:

Taula 1. Relació del vèrtex on va a parar la bola segons la dimensió de la taula de billar.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	B	C	B	C	B	C	B	C	B
2	A	B	A	C	A	B	A	C	A
3	B	C	B	C	B	C	B	C	B
4	A	A	A	B	A	A	A	C	A
5	B	C	B	C	B	C	B	C	B
6	A	B	A	C	A	B	A	C	A

En aquesta taula s'acaba de constatar l'antisimetria que intuíem abans. Observem que si al taulell de dimensió $n \times m$ el recorregut de la bola acaba al vèrtex A, al taulell $m \times n$ acabarà al vèrtex C. En canvi, si un dels dos acaba al vèrtex B, l'altre també.

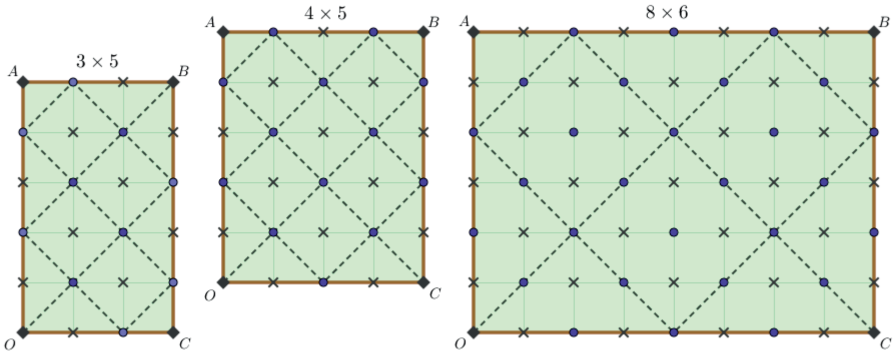
No sembla possible acabar al mateix vèrtex O en què hem començat. Si mirem qualsevol dels recorreguts que tenim representats, comprendrem per què és impossible que la bola hi torni. Per arribar al vèrtex de sortida, O, la bola haurà de rebotar en algun moment a una banda i retornar pel mateix camí que acaba de fer, i això no podrà ser perquè el camí que seguirà després del rebot serà perpendicular al camí que l'hi ha portat en estar enviada amb angles de 45°.

Els taulells del tipus $(k \cdot n) \times (k \cdot m)$ i $(p \cdot n) \times (p \cdot m)$ hauran d'acabar en el mateix vèrtex, ja que, com s'ha comentat a l'apartat anterior, els dos camins tindran la mateixa forma.

També observem una certa regularitat en els taulells on la primera dimensió és senar, $(2k + 1) \times m$. En aquests taulells, la bola cau alternativament al vèrtex A o B segons si la segona dimensió és parell o senar.

Un altre fet curiós és el que veiem quan una dimensió és una potència de 2. Si estudiem els taulells de la forma $2^k \times m$, veiem que apareixen successions de $k - 1C$ seguides d'una B.

Totes aquestes observacions ens porten a la idea que la solució general ha d'estar relacionada amb la paritat. Per analitzar els diferents casos, discriminarem els tipus de taulells segons si contenen alguna dimensió senar o no. I marcarem els punts possibles per on pot passar la bola (en els quals les dues coordenades del punt sumin parell).



Imatge 8. Camins d'un llançament a 45° en diferents taulells, marcats segons la paritat.

Així, els punts de la taula de billar ens queden diferenciats com les caselles en un taulell d'escacs: els punts per on pot passar la bola, marcats amb una rodona i els punts per on no podrà passar, marcats amb una creu.

- Taulells amb dues dimensions senars: queda marcat només el *B*, a part del vèrtex de sortida, *O*. Als vèrtexs *A* i *C* la bola no hi caurà mai. Per tant, el camí acabarà al punt *B*.
- Taulells amb la primera dimensió senar i l'altra parell: només està marcat el punt *A* i el camí acabarà al vèrtex *A*; si girem les dimensions, només estarà marcat el *C* i el camí acabarà al *C*.
- Taulells amb dues dimensions parells: estan marcats tots els vèrtexs i la bola podria acabar en qualsevol d'ells menys al de sortida. Per descobrir en quin vèrtex cau, dividirem les dues dimensions *m* i *n* per MCD (n,m) i així caurem en una de les situacions anteriors.[2]

Fixem-nos ara en el nombre de rebots que fa la bola contra les bandes de la taula de billar:

Taula 2. Relació del nombre de rebots que fa la bola segons la dimensió de la taula de billar.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	1	4	2	6	3	8	4	10
3	3	4	1	6	7	2	9	10	3
4	4	2	6	1	8	4	10	2	12
5	5	6	7	8	1	10	11	12	13
6	6	3	2	4	10	1	12	6	4

Quan observem la taula, hi veiem una simetria absoluta, i és que ara només tenim en compte el nombre de rebots. Si ens fixem en la imatge 6, ens adonarem que, quan girem la taula de billar i passem d'un taulell de dimensió $n \times m$ a un de dimensió $m \times n$, el camí també «gira» (de fet, es produeix una simetria respecte a la bisectriu del vèrtex de sortida); en canvi, el nombre de rebots es manté.

2. El 1961 A. Zavrotsky va patentar un aparell òptic basat en aquesta teoria per trobar el MCD de dos nombres.

Destaquem també els uns (1) a la diagonal principal, i dues altres diagonals que hi haurà amb dosos (2), o dues més amb tresos (3). . . En general, veurem que les dues diagonals amb valors $k \neq 1$ contindran taulells $n \times m$, on MCD$(n,m) = k$.

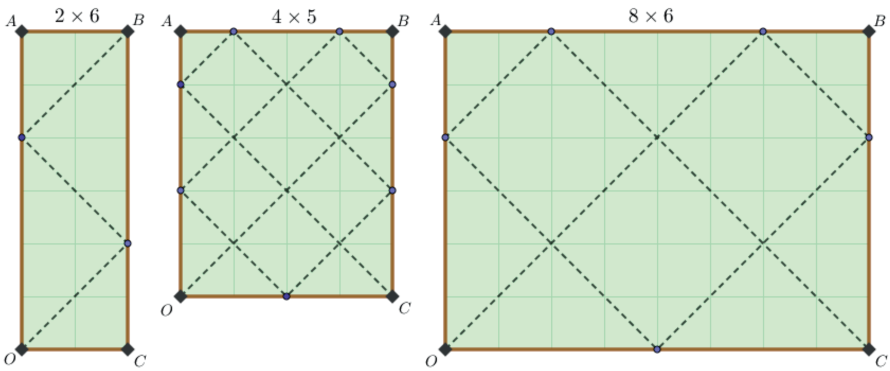
Què passa, doncs, amb els altres valors? Si observem les diagonals que tallen perpendicularment la diagonal formada només per uns (1), veiem uns quants resultats repetits només amb valors parells; per exemple, la diagonal amb només quatres (4) que representa els taulells 1×4, 2×3, 3×2 i 4×1. També n'hi ha una altra amb sisos (6). Ara, la regla que podríem trobar per aquests nombres parells s'estronca amb la diagonal de vuits (8), que conté dos dosos (2).

Amb un estudi detingut sobre els valors que van apareixent, acabem trobant la fórmula que generalitza el nombre de bandes en un taulell de dimensió $n \times m$:

$$bandes = \frac{n + m - \mathrm{MCD}(n,m)}{\mathrm{MCD}(n,m)}$$

Una darrera cosa. Un cop comparats els camins, el nombre de rebots i el vèrtex on acaba la bola, encara ens queda per investigar la relació entre la longitud del camí seguit i la longitud dels costats de la taula de billar.

Vegem-ne tres exemples que ens serviran per extrapolar la propietat al cas general:



Imatge 9. Exemple de camins en diferents taulells per calcular-ne la longitud.

$$camí(2 \times 6) = \sqrt{8} + \sqrt{8} + \sqrt{8} = 3\sqrt{8} = 6\sqrt{2} \rightarrow camí(2 \times 6) = \sqrt{2} \cdot \mathrm{mcm}(2{,}6)$$

$$camí(4 \times 5) = \sqrt{32} + \sqrt{2} + \sqrt{18} + \sqrt{8} + \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{2} + \sqrt{32} = 20\sqrt{2}$$
$$\rightarrow camí(4 \times 5) = \sqrt{2} \cdot \mathrm{mcm}(4{,}5)$$

$$camí(8 \times 6) = \sqrt{72} + \sqrt{8} + \sqrt{32} + \sqrt{32} + \sqrt{8} + \sqrt{72} = 24\sqrt{2}$$
$$\rightarrow camí(8 \times 6) = \sqrt{2} \cdot \mathrm{mcm}(8{,}6)$$

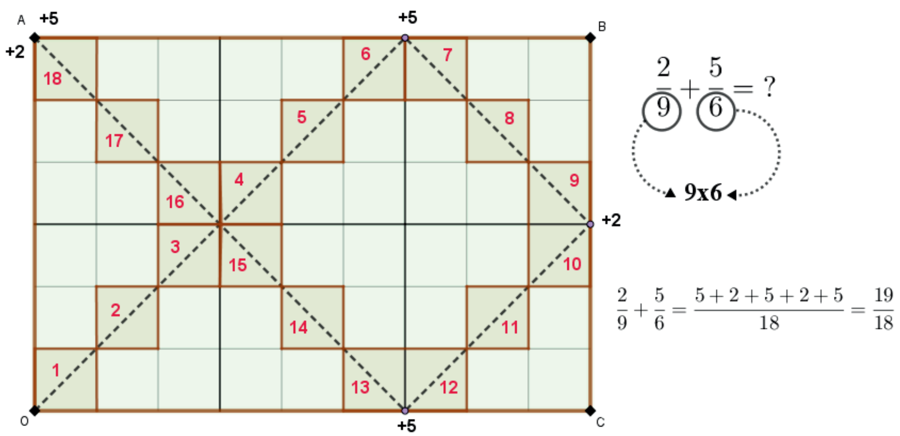
En aquests casos hem vist que la longitud del camí és un múltiple d'arrel de 2; de fet, aquest coincideix amb el nombre de quadrats unitats pels quals passa el camí. Si comprovem aquesta propietat per als altres exemples, veiem que també funciona. Deixaré la demostració com a exercici, amb la intenció de donar-ne la clau en un segon article.

Conclusions

Al llarg d'aquest article hem investigat sobre les peculiaritats dels camins que pren una bola de billar llançada des d'una banda amb un angle de 45° segons si el taulell és d'una mida o d'una altra. Hem ofert idees per convertir un problema com aquest en una situació d'investigació a l'aula de matemàtiques. Hem intentat donar resposta a algunes de les preguntes que ens hem anat fent i ara, quan escric aquestes línies, m'adono que algunes han quedat sense resposta i que me'n venen moltes altres al cap. Què passaria si un dels costats fos un nombre racional? I, si fos irracional, podríem arribar mai a colar la bola en alguna cantonada?

Epíleg: un pas més enllà del problema inicial

El 7 de juliol de 2022 em va sorprendre un tuit de Roberto Santos (@rober_fun) en el qual explicava de manera visual com calcular una suma de fraccions amb els rebots en una taula de billar.



Imatge 10. Exemple del mètode de càlcul proposat per Roberto Santos.

El mètode per calcular $\frac{a}{n}+\frac{b}{m}$ consistia a agafar un taulell de billar de dimensió $n \times m$ i llançar una bola amb un angle de 45°. Un cop fet el llançament, cal comptar el nombre de rebots als costats del taulell que mesuren m, als quals donem un valor de a, i el nombre de rebots als costats que mesurin n, als quals donem el valor de b. El vèrtex d'arribada toca ambdós tipus de costats, per tant, sumem a i b. La suma de totes les a i les b representa el numerador de la fracció, mentre que el denominador és el nombre de quadrats unitaris per on ha passat la bola.

Aquest darrer mètode l'he trobat fascinant i pot arribar a ser de molta utilitat per tancar l'exercici inicial amb una síntesi de tots els petits resultats que hem acabat trobant i connectar la suma de dues fraccions amb el llançament d'una bola de billar.